

Cours – Séquence n° 11 – FONCTIONS (IV) :

fonction logarithme népérien



En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper*, publie « *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* ».

Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.

Neper construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre).

Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de *Neper*. Les mathématiciens anglais *Henri*

Briggs (1561 ; 1630) et *William Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de *Neper*.

Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.

L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (paragraphe II). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

I- LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

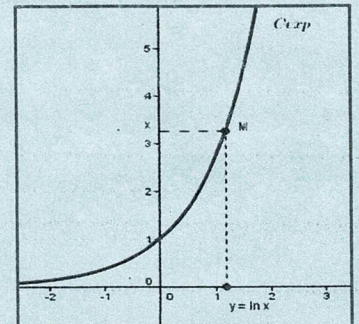
Lien avec la fonction exponentielle (rappel)

La fonction exponentielle est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

et à valeurs dans $]0 ; +\infty[$, puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

pour tout nombre réel x de $]0 ; +\infty[$, il existe un unique nombre réel y tel que $e^y = x$.



Définition

On appelle **logarithme népérien**, notée $\ln$, la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ qui, à tout nombre réel $x > 0$, associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y . On note : $y = \ln x$.

Remarque

Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log**, et définie sur $]0 ; +\infty[$

par : $\log x = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Propriétés : premières conséquences algébriques

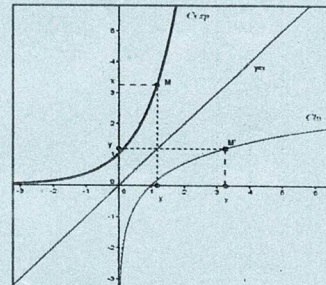
- 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$.
- 2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^{\ln(x)} = x$.
- 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- 4) $\ln(1) = 0$.
- 5) $\ln(e) = 1$.
- 6) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

Démonstration

- 1) Découle de la définition.
- 2) D'après 1), si on pose $y = \ln(x)$, alors $x = e^y = e^{\ln(x)}$
- 3) D'après 1), si on pose $y = e^x$, alors $x = \ln(y) = \ln(e^x)$.
- 4) $e^0 = 1$ donc, d'après 1), $\ln(1) = 0$.
- 5) $e^1 = e$ donc, d'après 1), $\ln(e) = 1$.
- 6) $e^{-1} = \frac{1}{e}$ donc, d'après 1), $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

Propriété

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque

On dit que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réiproques l'une de l'autre.

Démonstration

On note respectivement C_{exp} et C_{ln} les courbes respectives des fonctions exp et ln .

Pour tous réels $x > 0$ et pour tous réels y ,

$$M'(x; y) \in C_{ln} \Leftrightarrow y = \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow x = e^y$$

$$\Leftrightarrow M(y; x) \in C_{exp}$$

Ainsi, C_{exp} et C_{ln} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriétés algébriques

Pour tout $a \in \mathbb{R}^{++}$ et pour tout $b \in \mathbb{R}^{++}$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$1) \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \text{ (relation fonctionnelle).}$$

$$2) \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b).$$

$$3) \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

$$4) \ln(a^n) = n \ln(a).$$

$$5) \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a).$$

Démonstration

- 1) Soient a et b deux réels strictement positifs. On a $e^{\ln(ab)} = ab$ et $e^{\ln(a) + \ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = ab$.
Donc $e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a) + \ln(b)}$, donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

$$2) \text{ Soit } b \in \mathbb{R}^{++} \quad b \times \frac{1}{b} = 1 \quad \text{donc} \quad \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(1)$$

$$\text{donc} \quad \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(1) \text{ d'après 1)}$$

$$\text{donc} \quad \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$$

$$\text{donc} \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

$$\begin{aligned}
 3) \text{ Soit } a \in \mathbb{R}^{*+} \text{ et } b \in \mathbb{R}^{*+} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) \\
 &= \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \text{ d'après 1)} \\
 &= \ln(a) - \ln(b) \text{ d'après 2)}
 \end{aligned}$$

4) Soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$

1^{er} Cas: Si $n \in \mathbb{N}$

Récurrence par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(a^n) = n \ln(a)$

Initialisation: si $n=0$ alors $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(a) = 0$

Donc la propriété admet au rang $n=0$

Hérédité: Supposons que à un rang $n \in \mathbb{N}$ $\ln(a^n) = n \ln(a)$ et montrons que $\ln(a^{n+1}) = (n+1) \ln(a)$

$$\text{Or, } \ln(a^{n+1}) = \ln(a \times a^n)$$

$$= \ln(a) + \ln(a^n) \text{, d'après 1)}$$

$$= \ln(a) + n \ln(a) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$= (n+1) \ln(a)$$

La propriété admet au rang $n+1$, elle est héréditaire

Conclusion: D'après l'axiome de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(a^n) = n \ln(a)$

2^{ème} Cas: Si $n \in \mathbb{Z}^-$ On pose $n = -m$, avec $m \in \mathbb{N}$

$$\ln(a^n) = \ln(a^{-m})$$

$$= \ln\left(\frac{1}{a^m}\right)$$

$$= -\ln(a^m) \text{, d'après 2)}$$

$$= -m \ln(a) \text{ d'après 1^{er} cas, car } m \in \mathbb{N}$$

$$= n \ln(a)$$

$$5) \ln(a) = \ln(\sqrt{a}^2)$$

$$= 2 \times \ln(\sqrt{a})$$

$$\text{Donc } \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

Conclusion: $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \ln(a^n) = n \ln(a)$

Exemple 1

Soit $A = \ln(144)$. Ecrire le nombre réel A en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$.

$$A = \ln(144)$$

$$A = \ln(12^2)$$

$$A = 2 \ln(12)$$

$$A = 2 \ln(4 \times 3)$$

$$A = 2(\ln(2^2) + \ln(3))$$

$$A = 2(2\ln(2) + \ln(3))$$

$$\rightarrow A = 4\ln(2) + \ln(3)$$

Exemple 2

Soit $B = \ln(81) + \ln(3\sqrt{3})$. Ecrire le nombre réel B en fonction de $\ln(3)$.

$$B = \ln(81) + \ln(3\sqrt{3})$$

$$B = \ln(3^4) + \ln(3) + \ln(\sqrt{3})$$

$$B = 4\ln(3) + \ln(3) + \frac{1}{2}\ln(3)$$

$$B = 5,5\ln(3)$$

Exemple 3

Démontrer que pour tout réel x , $-x + \ln(1 + 2e^x) = \ln(2 + e^{-x})$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A(x) = -x + \ln(1 + 2e^x)$$

$$A(x) = \ln(e^{-x}) + \ln(1 + 2e^x)$$

$$= \ln(e^{-x} \times (1 + 2e^x))$$

$$= \ln(e^{-x} + 2e^0)$$

$$= \ln(e^{-x} + 2 \times 1)$$

$$= \ln(e^{-x} + 2)$$

$$= \ln(2 + e^{-x})$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad -x + \ln(1 + 2e^x) = \ln(2 + e^{-x})$$

II- ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Propriétés

- 1) La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$.
- 2) Pour tout x de $]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- 3) La fonction logarithme népérien est continue sur $]0; +\infty[$.
- 4) La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- 5) La fonction logarithme népérien est concave sur $]0; +\infty[$.
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- 7) Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		+
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration 2)*

1) Admis

2) On pose $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = e^{\ln(x)}$

f est dérivable...

$$(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) &= \exp'(\ln(x)) \times \ln'(x) \\ &= \exp(\ln(x)) \times \ln'(x) \\ &= x \times \ln'(x) \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = e^{\ln(x)} = x \text{ donc } f'(x) = 1$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x \times \ln'(x) = 1$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

3) $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et d'après 2)

a) D'après 2) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{1}{x} > 0 \text{ donc } \ln'(x) > 0$$

Donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

5) $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$

La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$

$\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad x^2 > 0 \text{ et } \frac{-1}{x^2} < 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad \ln''(x) < 0$

Donc la fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}^{*+}$

6) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

$\forall A \in \mathbb{R}^{*+} \exists x_0 \in \mathbb{R}^{*+} : \forall x > x_0 \Rightarrow \ln(x) > A$

Soit $A \in \mathbb{R}^{*+}$

$\ln(x) > A \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) > \exp(A)$, car e est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$
 $\Leftrightarrow x > e^A$

Il suffit de choisir $x_0 = e^A$

Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}^{*+} \exists x_0 = e^A \in \mathbb{R}^{*+} : \forall x > x_0 \Rightarrow \ln(x) > A$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln(x))$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

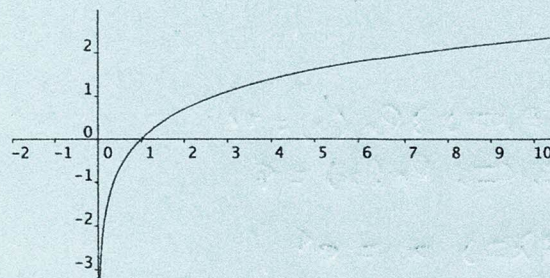
Donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln(x)) = -\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

7) d'où le tableau de variation de $\ln$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

Courbe représentative de la fonction logarithme népérien**Remarque**

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $\ln$.

**Exemple**

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction $\ln$ au point d'abscisse 1, puis au point d'abscisse e .

Soit (T_1) la tangente à la courbe de $\ln$ en 1

$$(T_1): y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1)$$

$$\text{Or, } \ln'(1) = 1 \text{ et } \ln(1) = 0$$

$$\text{Donc } (T_1): y = 1(x-1) + 0$$

$$(T_1): y = x - 1$$

Soit (T_e) la tangente à la courbe de $\ln$ en e

$$(T_e): y = \ln'(e)(x-e) + \ln(e)$$

$$\text{Or, } \ln'(e) = \frac{1}{e} \text{ et } \ln(e) = 1$$

$$\text{Donc } (T_e): y = \frac{1}{e}(x-e) + 1$$

$$(T_e): y = \frac{1}{e}x - 1 + 1$$

$$(T_e): y = \frac{1}{e}x$$

Propriétés : résolution d'équations et d'inéquations

Pour tous réels a et b strictement positifs:

- 1) $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b.$
- 2) $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b.$
- 3) $\ln(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$
- 4) $\ln(a) < 0 \Leftrightarrow a \in]0; 1[.$
- 5) $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a \in]1; +\infty[.$

Démonstration : découle de la propriété précédente

Example 1

Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'équation $3\ln(x) - 4 = 8$. : (E)

$$(E) \Rightarrow \exists P_n(x) = 12$$

$$(E) \Leftrightarrow \ln(x) = 4$$

$$(E) \subset x = e^4$$

Pour la solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x+1} = 5$. : (E)

$$(EX-) \rho_n(e^{x+i}) = \rho_n(5)$$

$$(E) \Rightarrow x+1 = \ell_n(S)$$

$$(E) \Leftrightarrow x = e_n(s) - 1$$

Pour la relation de l'équation et $p_n(s) \rightarrow 1$

Example 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(5 - x) > 2\ln(x + 1)$. : (I)

1) On cherche un nombre de x pour lesquels l'ingrédient a un sens

$$\bullet Q_n(S-x) \text{ exists } \Leftrightarrow S-x > 0$$

$$p_n(S \rightarrow x) \text{ exists} \Leftrightarrow x < 5$$

• $\ln(x+1)$ exists $\Leftrightarrow x+1 > 0$

$$11 \quad (\Rightarrow) x > -1$$

Par l'ingratitude n'a de son que son J-1: 51

2) Resolvon (I) zu $J-1$ SL

$$(IX) \Rightarrow \ln(s-x) > \ln((x+y)^2)$$

(I)C) $s \rightarrow x(x+y)^2$ can be shifted against $\ln \mathbb{R}^{*+}$

(I)(C) $-x^2 - 7x + 6 > 0$ polynôme de degré 2

Q. 1 at une racine évidente

So, $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x^2 - 3x + 4 = (x-1)(-x-4)$

Les racines sont -4 et 1

x	-1	1	5
$x^2 - 3x + 4$		+	

$$(I) \Leftrightarrow x \in]-1; 1[$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est : $] -1; 1[$

Exemple 4

Une voiture perd en moyenne 15% de sa valeur en un an.

Au bout de combien de temps a-t-elle perdu la moitié de sa valeur ?

Soit U_n le prix de la voiture n années après achat

U_0 est le prix initial

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 0,85 U_n$ Soit (U_n) est une suite géométrique de 1^{er} terme U_0

et de raison $q = 0,85$

Soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = U_0 \times q^n = U_0 \times 0,85^n$

On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n < \frac{1}{2} U_0$: (I)

$$(I) \Leftrightarrow 0,85 < \frac{1}{2}$$

$$(I) \Leftrightarrow \ln(0,85) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(I) \Leftrightarrow n \ln(0,85) < -\ln(2)$$

$$(I) \Leftrightarrow n > \frac{-\ln(2)}{\ln(0,85)} \quad \text{car } \ln(0,85) < 0$$

$$(I) \Leftrightarrow n \geq 5$$

III- COMPLÉMENTS SUR LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Propriétés : théorème des croissances comparées

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$
- 2) Pour tout entier naturel non nul n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0.$
- 4) Pour tout entier naturel non nul n , $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0.$

Démonstration 3)*

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ (fi) Changement de variable, on pose $X = \ln(x) (\Leftrightarrow) x = e^X$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$, d'après le Théorème des croissances comparées.

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$ (fi) Changement de variable, on pose $X = \frac{1}{x} (\Leftrightarrow) x = \frac{1}{X}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \times \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} \times (-\ln(X)) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(X)}{X}$

Or, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ d'après 1) par produit, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln(X)}{X}\right) = 0$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

4) 1^{er} cas: Si $n=1$, d'après 3), $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

2^{em} cas: Si $n \geq 2$, d'après 3), $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{n-1} \times x \ln(x))$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, d'après 3).

Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$

Dans les deux cas, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$

ExempleDéterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x))$. (8.0)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ d'après le théorème de croissance comparée.

Donc, par différence, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$

Et, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x)) = +\infty$

Définition

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et strictement positive sur I (c'est-à-dire pour tout x de I $u(x) > 0$).

La **composée de la fonction u par la fonction logarithme népérien**, notée $\ln u$, est la fonction définie sur I qui, à tout nombre réel x de I , associe le nombre $\ln(u(x))$.

Propriété (admise)

Si u est une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Exemple

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

• $f = \ln(u)$ avec $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) = 1 + e^x$

• u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

• et $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ donc $1 + e^x > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) > 0$

• $f' = \frac{u'}{u}$, donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

• Or, $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ et $1 + e^x > 0$

Donc, par quotient, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.